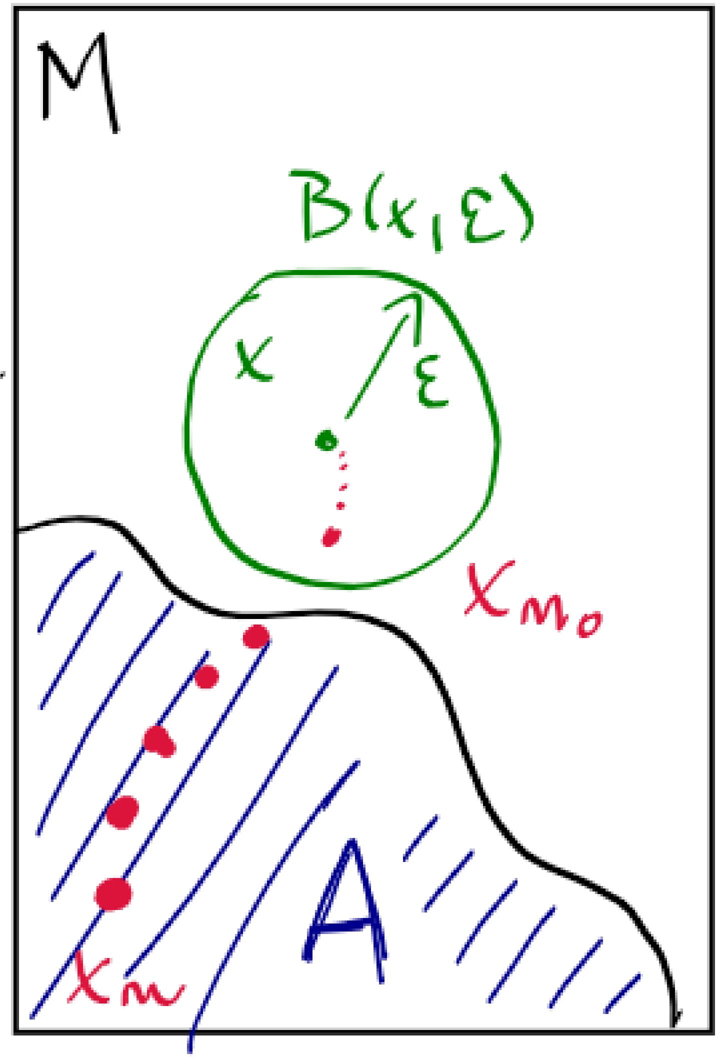
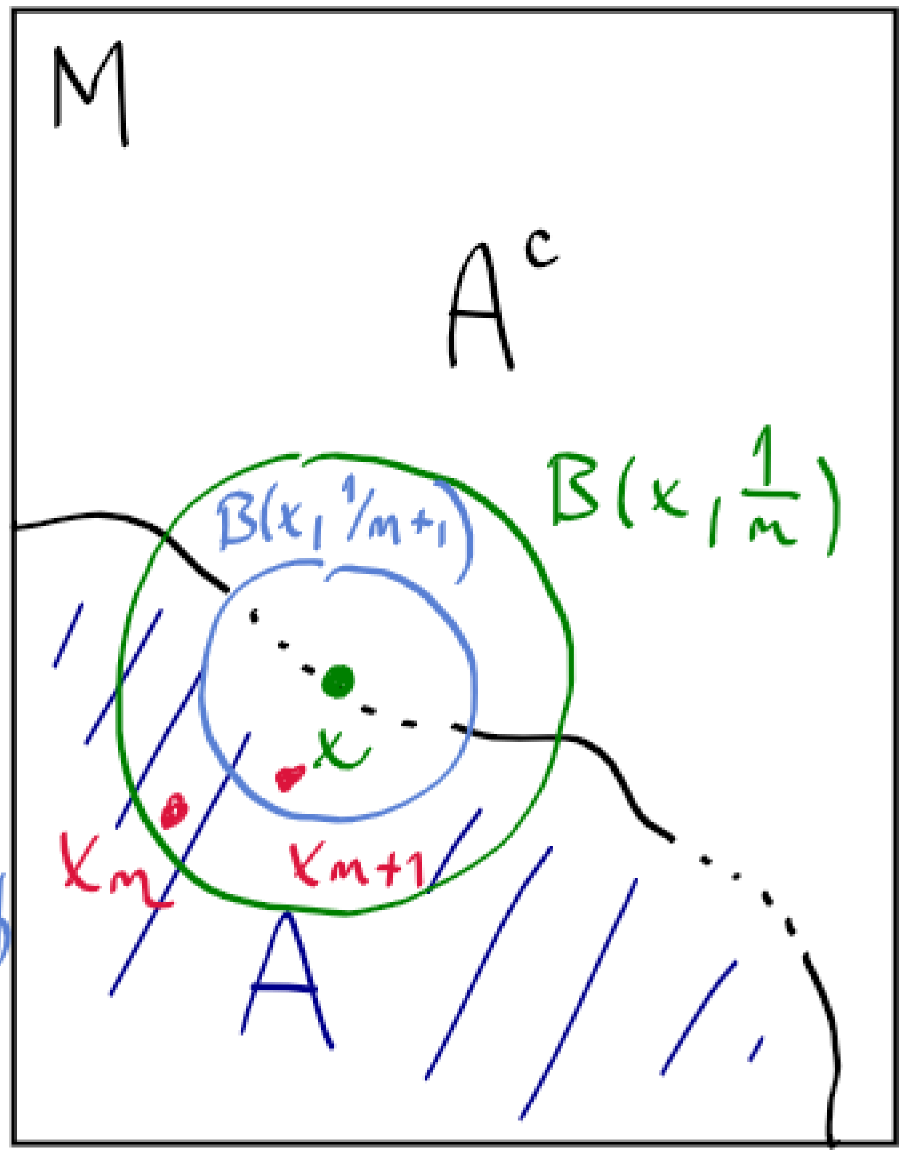
Věta 43: NVJE: (i) $A \subseteq M$ je uzavřená
(ii) A^c je otevřená (iii) $\overline{A} = A$
(iv) $\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A$ konvergentní: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \in A$

Důkaz (i) $\Leftrightarrow$ (iv): (i) $\Rightarrow$ (iv): nechť $A \subseteq M$ je uzavřená. Chceme (iv); buďiž dána libovolná $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A$ konvergentní. Označme $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Chceme: $x \in A$.

Předpokládejme pro spor $x \notin A$.
Podle (i)$\Leftrightarrow$(ii): $x \in A^c$ je otevřená.
Tedy $\exists \varepsilon > 0$: $B(x,\varepsilon) \subseteq A^c$.
Podle definice limity
$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq n_0$: $x_n \in B(x,\varepsilon)$.
Speciálně $x_{n_0} \in B(x,\varepsilon)$, ale zároveň $x_{n_0} \in A$.
Ovšem $B(x,\varepsilon) \subseteq A^c$, tj. $B(x,\varepsilon) \cap A = \emptyset$. ↯.



(iv) $\Rightarrow$ (i): nepřímo. Tj. nechť $\neg$(i); chceme $\neg$(iv).
$\neg$(i): nechť A není uzavřená. Tj. $H(A) \not\subseteq A$, a tedy $\exists x \in H(A) \setminus A$.



Chceme $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A$, že $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ ($\notin A$, tj. lze vykonv.)

Protože $x \in H(A)$,
$\forall \varepsilon > 0: B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ $\wedge$ $B(x,\varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset$

Pro $n \in \mathbb{N}$ (a $\varepsilon = \frac{1}{n}$) vybereme $x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap A$ ($\neq \emptyset$). Tím pádem

$$0 \leq \rho(x, x_n) < \frac{1}{n},$$

tedy podle

LO2P $\underset{0}{\downarrow} \Rightarrow \underset{0}{\downarrow} \quad \underset{0}{\downarrow}$ Tj. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Ale navíc $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A$, ale $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \notin A$.
Tedy „lze vykonvergovat", a (iv) neplatí ⊠

V49: $f: M \to \mathbb{R}$. NVJE: (i) f je spoj. na M
(ii) $\forall G \subseteq \mathbb{R}$ ot.: $f^{-1}(G)$ je ot. (iii) $\forall F \subseteq \mathbb{R}$ uz.: $f^{-1}(F)$ je uz.

Důkaz: (i) $\Rightarrow$ (ii): nechť f je spojitá na M.

Buďiž dána lib. $G \subseteq \mathbb{R}$ ot. Chceme: $f^{-1}(G)$ je ot.

BÚNO $f^{-1}(G) \neq \emptyset$ ($\emptyset$ je ot.). Nechť $a \in f^{-1}(G)$.

Chceme: $a \in \left(f^{-1}(G)\right)^\circ$, tj. $\exists \delta > 0: B(a,\delta) \subseteq f^{-1}(G)$.

Ale $f(a) \in G$, přičemž G je otevřená, takže

$\exists \varepsilon > 0: B(f(a),\varepsilon) \subseteq G$.

Podle definice spojitosti funkce f v bodě a

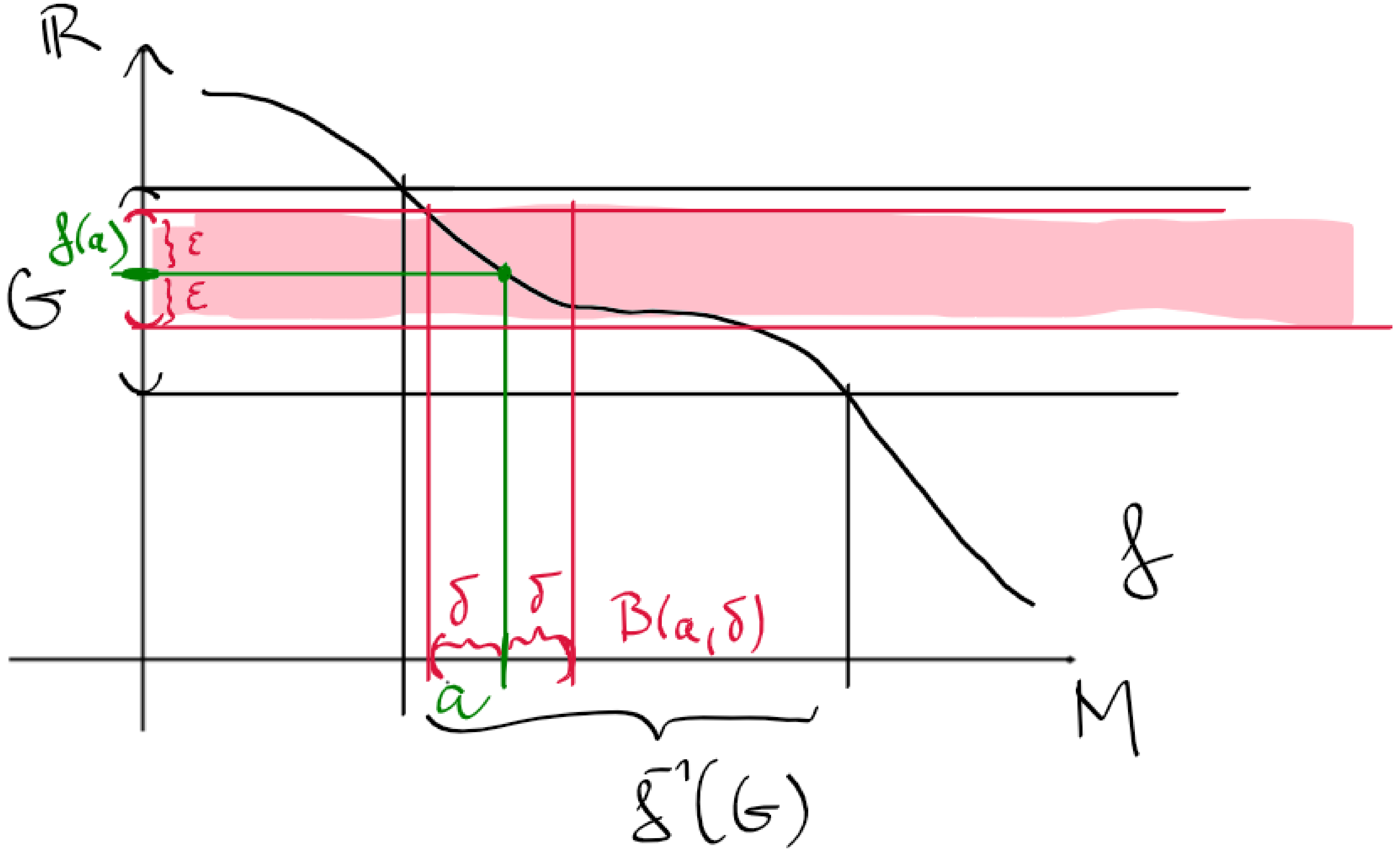
pro toto ε existuje δ ... :

$$\exists \delta > 0 \ \forall x \in B(a,\delta): f(x) \in B(f(a),\varepsilon) \subseteq G$$

Tedy celkem $\forall x \in B(a,\delta): f(x) \in G$. Tj.

(jiný zápis) $f(B(a,\delta)) \subseteq G$ tj.

$B(a,\delta) \subseteq f^{-1}(G)$. To chceš!



(ii) $\Rightarrow$ (i): nechť $\forall G \subseteq \mathbb{R}$ ot.: $f^{-1}(G)$ je ot.

Chceme dokázat (i), tj.: f je spojitá na M.

nechť $a \in M$ je libovolný; chceme ukázat spojitost f v bodě a.

Buďiž tedy dáno $\varepsilon > 0$. (Chceme najít δ.)

$G := B(f(a), \varepsilon)$ … otevřená množina. Tedy

$f^{-1}(G) \subseteq M$ je otevřená v M (podle (ii)).

Ovšem $a \in f^{-1}(G)$, neboť $f(a) \in B(f(a), \varepsilon) = G$.

Tedy a má $f^{-1}(G)$ „ochranné okolí", tj.

$\exists \delta > 0$: $B(a, \delta) \subseteq f^{-1}(G)$. Tj.

$f(B(a, \delta)) \subseteq G$, tj.

$\forall x \in B(a, \delta)$: $f(x) \in G = B(f(a), \varepsilon)$.

To jest, f je spojitá v bodě a.

Zbývá (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii):

[(iii) $\forall F \subseteq \mathbb{R}$ uz.: $f^{-1}(F)$ je uz. (v M).]

VSUVKA: Platí: $f: X \longrightarrow Y$ lib. zobr.

$A, B \subseteq Y$. Pak platí

(i) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$

(ii) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

(iii) $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$

Dk: (iii) nechť $x \in f^{-1}(A \setminus B)$. Chci $x \in f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$

Tedy $f(x) \in A \setminus B$, tj. $f(x) \in A \wedge f(x) \notin B$,

tj. $x \in f^{-1}(A) \wedge x \notin f^{-1}(B)$,

to jest, $x \in f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$.

Opačná inkluze: nechť $\supseteq$, pak zpětným postupem $x \in f^{-1}(A \setminus B)$.

Pozor: $f: X \to Y$, $A, B \subseteq X$;
rozhodněte, co platí obecně:

- $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$
- $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
- $f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$.

Pro které funkce všechny rovnosti platí? (pro libovolné $A, B \subseteq X$)

(ii) $\Rightarrow$ (iii): nechť „vzor ot. je ot."

Budiž $F \subseteq \mathbb{R}$ uz. daná. Chceme: $f^{-1}(F)$ uz.

$$\boxed{M} \setminus f^{-1}(F) = \boxed{f^{-1}(\mathbb{R})} \setminus f^{-1}(F) =$$

$f(M) \subseteq \mathbb{R}$

$$= f^{-1}(\underbrace{\mathbb{R} \setminus F}_{F \text{ je uz} \Rightarrow \text{ot.}})$$

je podle (ii) (náš předp.) otevřená.

Celkem $(f^{-1}(F))^c$ je ot., tj. $f^{-1}(F)$ je uz.

(iii) $\Rightarrow$ (ii): zcela analogicky. Cv. ⊠

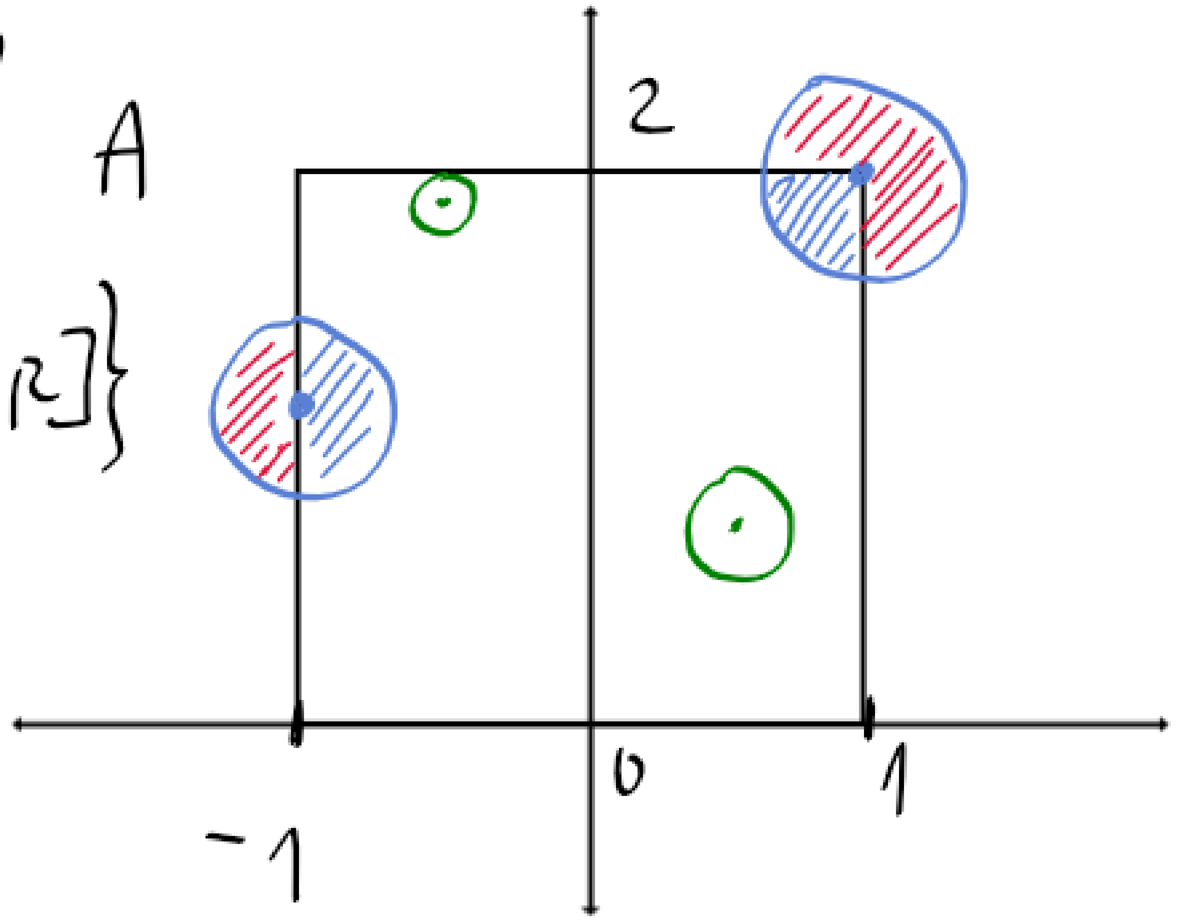
Příklad: • $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in (-1,1) \wedge 0 \leq y \leq 2\}$

Rozhodněte o uz., ot., omez., komp.

Najděte: A°, $\overline{A}$, $H(A)$.

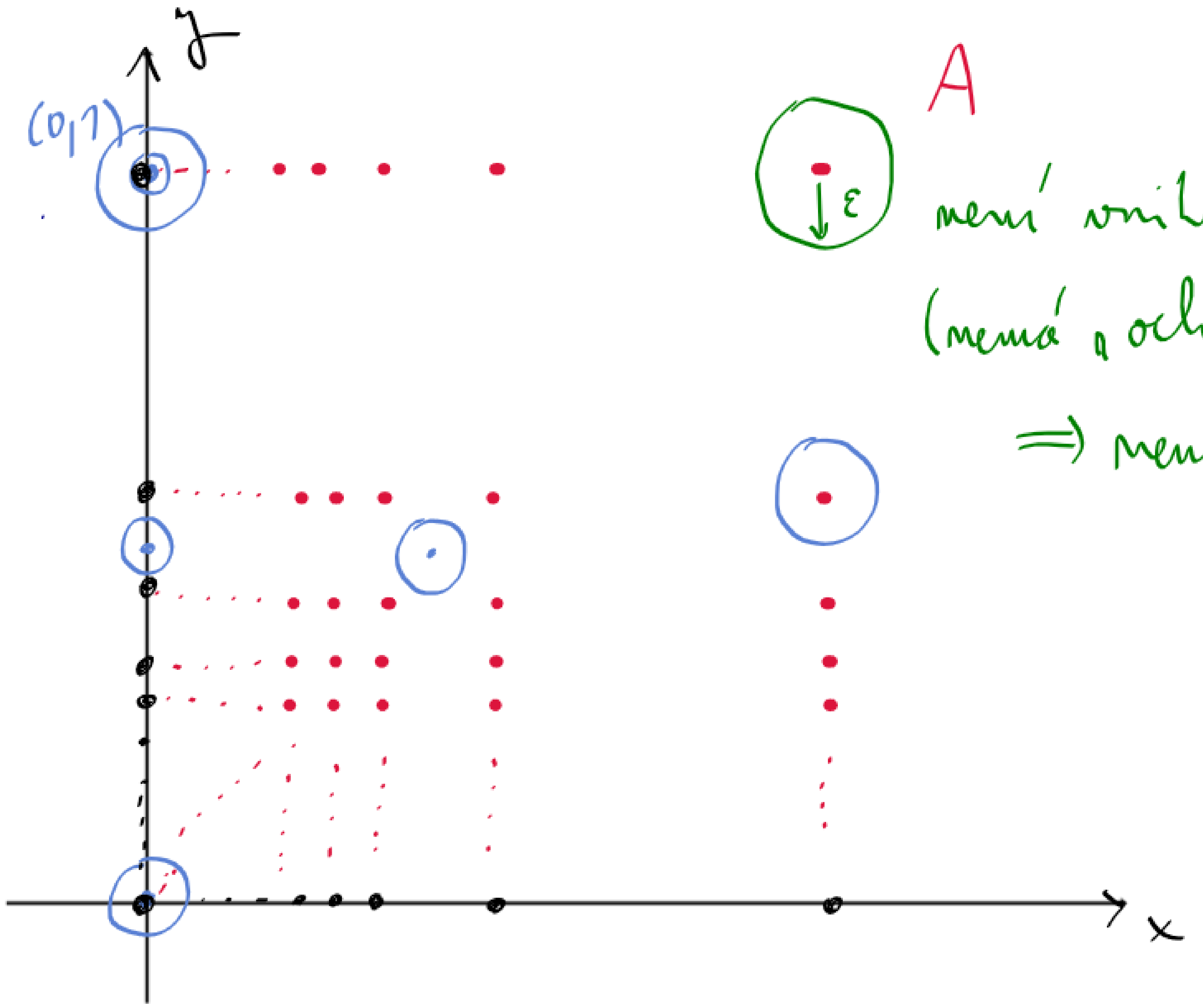
$$H(A) = [-1,1] \times \{0\} \cup \{(x,2) : x \in [-1,1]\} \cup \{(-1,y) : 0 \leq y \leq 2\} \cup \{(x,y) : x = 1, y \in [0,2]\}$$

$$\overline{A} = A \cup H(A) = [-1,1] \times [0,2] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; x \in [-1,1], y \in [0,2]\}$$



$$A^\circ = A \setminus H(A) = (-1,1) \times (0,2)$$

• $A = \{(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}) \in \mathbb{R}^2 : n, m \in \mathbb{N}\}$



není vnitřní bod (nemá „okol. okolí")

$\Rightarrow$ není ot.

není ot.

$m = 1,\ n \to \infty \qquad (\frac{1}{n}, 1) \in A,\ n \in \mathbb{N}$

$\lim_{n \to \infty} (\frac{1}{n}, 1) = (0,1) \notin A$

$\Rightarrow$ A není uz.

$H(A) = \{(0, \frac{1}{m}) : m \in \mathbb{N}\} \cup$

$\cup \{(\frac{1}{n}, 0) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{(0,0)\} \cup$

$\cup A$